# -EXERCICE 12.2-

## • ENONCE :

« Décrément logarithmique »

• On considère un oscillateur harmonique, amorti par un frottement fluide, dont une grandeur caractéristique $x(t)$ satisfait à l'équation différentielle :

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\times\frac{dx(t)}{dt}+\omega_0^2x(t)=0$ , où $\omega_0$ est la pulsation propre et $Q$ le facteur de qualité.

• Pour un régime pseudo-périodique ($Q \succ 0,5$), on définit le « **décrément logarithmique** » :

$$\delta=\frac{1}{n}\times Ln\left[\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right]$$ où $T$ est la pseudo-période du régime

1) Exprimer $\delta$ en fonction de $Q$.

2) A partir de quelle valeur de $Q$ a-t-on $Q=\frac{\pi}{\delta}$ à 1% près ?

 

# • CORRIGE :

« Décrément logarithmique »

1) Pour un régime pseudo-périodique, $x(t)$ est de la forme :

$$x(t)=A\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\cos(\Omega t+\varphi)\,,\quad \text{où}\quad \Omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=\frac{2\pi}{T}$$ est la **pseudo-pulsation**

**Rq :** il faut bien sûr connaître par cœur ce genre d'expression ; il est cependant plus facile de mémoriser celle-ci : $x(t)=A\exp(-\sigma\omega_0 t)\cos(\Omega t+\varphi)$, avec $\Omega=\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$ et où $\sigma=\dfrac{1}{2Q}$ est le coefficient d'amortissement de l'oscillateur (le régime critique est obtenu pour $\sigma=1$).

• On a alors : $$\delta=\frac{1}{n}\times Ln\left[\frac{A\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\cos(\Omega t+\varphi)}{A\exp\left(-\dfrac{\omega_0(t+nT)}{2Q}\right)\cos[\Omega(t+nT)+\varphi]}\right]=\frac{1}{n}\times Ln\left[\exp\left(\frac{n\omega_0 T}{2Q}\right)\right]=\frac{\omega_0 T}{2Q}$$

$$\Rightarrow\quad \delta=\frac{\omega_0}{2Q}\times\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{\delta=\frac{\pi}{Q\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}}$$

2) Pour $Q$ suffisamment grand, on peut écrire : $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}=\left(1-\dfrac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}\simeq 1+\dfrac{1}{8Q^2}\;\Rightarrow$ on aura

$\boxed{Q=\dfrac{\pi}{\delta}}$, à moins de 1% près, pour $\dfrac{1}{8Q^2}\le 10^{-2}\quad\Rightarrow\quad \boxed{Q\ge\sqrt{\dfrac{100}{8}}\simeq 3{,}5}$

**Rq :** même pour un oscillateur de facteur de qualité « modeste » ($\ge 3{,}5$), ce dernier est relié de manière très simple au décrément logarithmique, qui se prête aisément à une détermination expérimentale.